correction d'exercices

1°) <u>limites de suites géométriques</u>

a°) $3 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (3^n) = +\infty$.

b°) $0 \leq 0.999 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0.999^n) = 0$.

c°) $\forall n \in \mathbb{N}, 1^n = 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (1^n) = 1$.

d°) $\sqrt{2} \approx 1.4142$, donc $\sqrt{2} > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{2}^n\right) = +\infty$.

e°) $\sqrt{2} - 0.414 \approx 1.0002$, donc $\sqrt{2} - 0.414 > 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left[\sqrt{2} - 0.414\right]^n\right) = +\infty$.

f°) $\sqrt{2} - 0.415 \approx 0.9992$, donc $\sqrt{2} - 0.414 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left[\sqrt{2} - 0.415\right]^n\right) = 0$.

2°) <u>inverse de limite</u>

g°) $\forall n \in \mathbb{N}$, le produit de n fraction(s) est égal à la fraction du produit de leurs n numérateurs divisé par le produit de leur n dénominateurs, donc $\left[\frac{1}{3}\right]^n = \underbrace{\frac{1}{3}\frac{1}{3}\dots\frac{1}{3}}_{n \text{ fois}} = \frac{\overbrace{1\times1\times\dots\times1}^{n \text{ fois}}}{\underbrace{3\times3\times\dots\times3}_{n \text{ fois}}} = \frac{1^n}{3^n} = \frac{1}{3^n}$.

h°) $\frac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left[\frac{1}{3}\right]^n\right) = 0$.

i°) Puisque, $\forall n \in \mathbb{N}, \left[\frac{1}{3}\right]^n = \frac{1}{3^n}$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3^n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left[\frac{1}{3}\right]^n\right) = 0$.
Ce résultat est bien cohérent avec celui établi en a° ; en effet, diviser 1 par 3^n, qui devient de plus en plus grand, donne un résultat de plus en plus petit, à la limite nul.

3°) <u>$0.999 \dots = 1$ (première version)</u>

j°) $s_0 = 0$, $s_1 = 0.9$ et $s_2 = 0.99$.

k°) Si une suite géométrique a un de ses termes nul, tous ses termes suivants sont alors nuls, ce qui n'est pas le cas pour cette suite s, qui se trouve donc ne pas être géométrique.

l°) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - s_n = 1 - 0.\underbrace{9999999999 \dots 9}_{\text{le chiffre } 9 \text{ apparaît } n \text{ fois}} = \underbrace{0.000000000 \dots 0}_{\text{le chiffre } 0 \text{ apparaît } n \text{ fois}}1 = 0.1^n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - s_n = q^n$ avec $q = 0.1$.

m°) On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = 1 - 0.1^n$.

n°) $0.1 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0.1^n) = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n) = 1$; le nombre représenté par $0.999 \dots$, le chiffre 9 apparaissant une infinité de fois dans la partie décimale, est donc bien égal à 1.