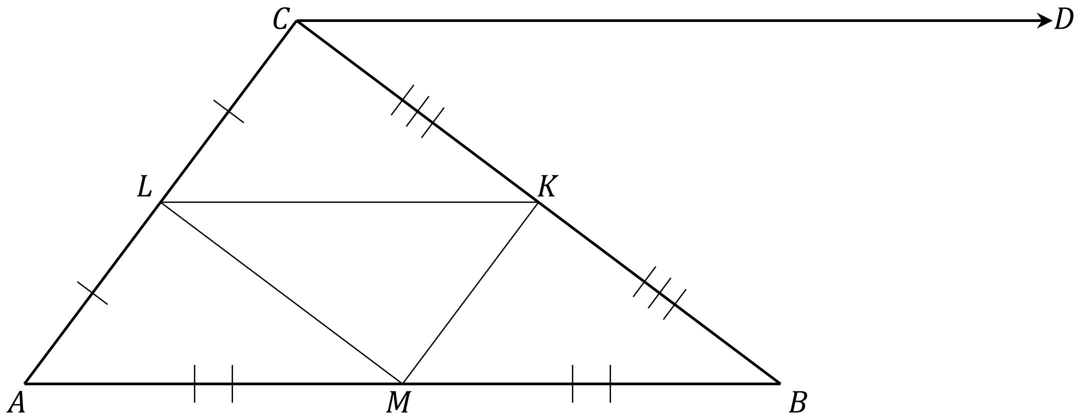
correction d'exercices

1°) Que la triforce soit avec vous !

a°)



b°) Les triplets de points (A, M, B) et (A, L, C) étant des triplets de points alignés dans le même ordre, comme $\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AC}$ ($= \frac{1}{2}$ puisque L et M sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$), d'après la réciproque du théorème de Thalès, les deux droites (BC) et (ML) sont donc parallèles. De la même manière, les deux droites (AC) et (KM) sont aussi parallèles, tout comme les deux droites (AB) et (KL). Tout côté du quadrilatère $AMKL$ est ainsi parallèle au côté opposé associé, donc ce quadrilatère $AMKL$ est bien un parallélogramme ; on obtient de la même manière que les quadrilatères $BKLM$ et $CLMK$ sont aussi des parallélogrammes. Puisque le quadrilatère $AMKL$ est un parallélogramme, on a donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{LK}$ et $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LA}$; puisque le quadrilatère $BKLM$ est un parallélogramme, on a donc $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{ML}$, et $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MB}$; enfin, puisque le quadrilatère $CLMK$ est un parallélogramme, on a donc $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{KM}$, et $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{KC}$. On a donc bien au final $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LA}$.

c°) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AK}$ et $\frac{2}{3}\left[\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{KL}\right] = \frac{2}{3}\left[\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{LK}\right] = \frac{2}{3}\left[\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}\right] = \frac{2}{3}3\overrightarrow{MB}$ $= 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

d°) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AL} - 2\overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{LK} = 2\left[\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK}\right] = 2\overrightarrow{AK}$; les deux vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}$ ont donc même direction, même sens et la longueur du segment $[AD]$ est le double de celle du segment $[AK]$; le point K est donc le milieu du segment $[AD]$. Comme ce même point K est aussi milieu du segment $[BC]$, les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ du quadrilatère $ABDC$ se coupant bien en leur milieu, ce quadrilatère $ABDC$ est donc un parallélogramme.

2°) un problème d'alignement

e°) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{AD}$.

f°) Dans le repère $(A\,;\,B, D)$, le point A a pour coordonnées $(0, 0)$, le point B a pour coordonnées $(1, 0)$, le point C a pour coordonnées $(1, 1)$, le point D a pour coordonnées $(0, 1)$, le point E a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et le point F a pour coordonnées $(0, 3)$.

g°) $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = -2\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right] = -2\left[\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DA}\right] = -2\left[\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB}\right] = -2\overrightarrow{CE}$;

les deux vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ ont donc même direction, donc les points C, E et F sont alignés.