correction

1°) **questions de cours (2 points)**

a°) Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme éventuellement aplati ou réduit à un point si et seulement si

_ les segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leurs milieux.

_ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

b°) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si,

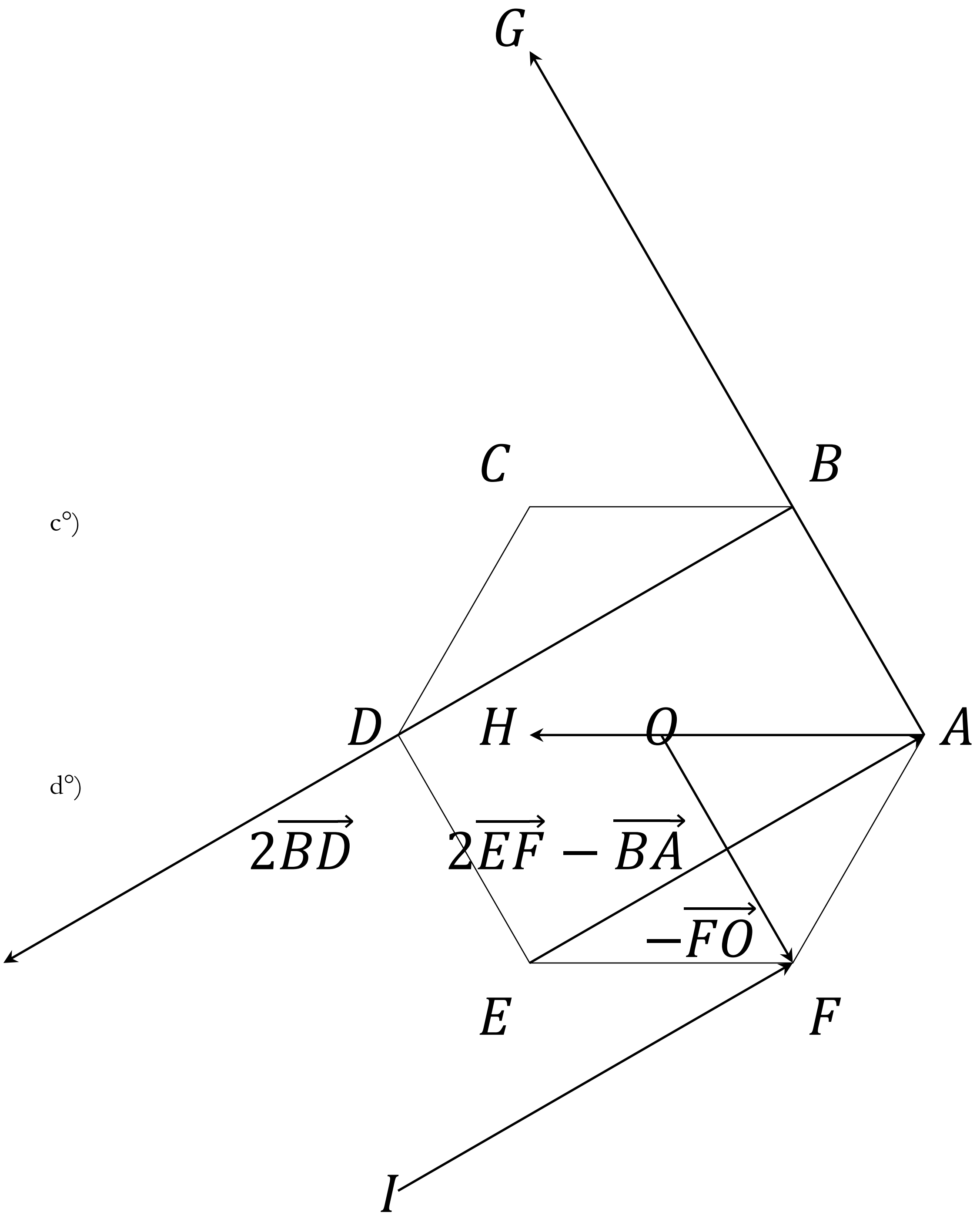
_ ils sont tous les deux nuls ou ont même sens, même direction et même longueur.

_ le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati ou réduit à un point.

2°) **vecteurs dans hexagone régulier (8 points)**

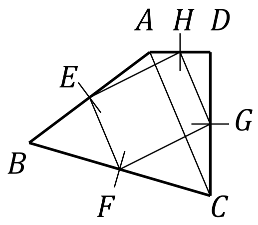
c°)

d°)



e°) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$.

3°) <u>quadrilatères de Varignon</u> (5 points)

f°) 

g°) Les triplets de points $(B\ ,E\ ,A)$ et $(B\ ,F\ ,C)$ étant des triplets de points alignés dans le même ordre, comme $\frac{BE}{AB} = \frac{BF}{BC}$ ($= \frac{1}{2}$ puisque E et F sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$), d'après la réciproque du théorème de Thalès, les deux droites (AC) et (EF) sont donc parallèles. De la même manière, les deux droites (AC) et (GH) sont aussi parallèles. Finalement, ces trois droites (AC), (EF) et (GH) sont ainsi bien parallèles.

h°) Les triplets de points $(B\ ,E\ ,A)$ et $(B\ ,F\ ,C)$ étant des triplets de points alignés dans le même ordre, les droites (AC) et (EF) étant parallèles, d'après le théorème de Thalès, $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$, donc $\frac{EF}{AC} = \frac{1}{2}$, donc $EF = \frac{AC}{2}$. De la même manière, on obtient $GH = \frac{AC}{2}$. Finalement, vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ ont même direction, même sens et même longueur ; ils sont donc bien égaux.

rq. : Il était possible de répondre aux question g° et h° d'une traite en traduisant que les points E, F, G et H sont milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ à l'aide d'égalités entre vecteurs de la façon suivante : $\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{CB}}{2}$, $\overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CD}}{2}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2}$. On a donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{\overrightarrow{BA}}{2} + \overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{CB}}{2}$ $= \frac{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}}{2} + \overrightarrow{AC} = \frac{\overrightarrow{CA}}{2} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ et $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{DA}}{2} + \overrightarrow{AC} + \frac{\overrightarrow{CD}}{2} = \frac{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}}{2} + \overrightarrow{AC}$ $= \frac{\overrightarrow{CA}}{2} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \frac{\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, donc les deux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux et leur direction commune est celle du vecteur $\overrightarrow{AC}$, ce qui prouve en outre, que les trois droites (AC), (EF) et (GH) sont parallèles.

4°) <u>centre de gravité de triangle non plat du plan</u> (5 points + 1 point bonus)

j°) Les diagonales $[AB]$ et $[GJ]$ du quadrilatère $AJBG$ se coupent en leur milieu M, donc ce quadrilatère est bien un parallélogramme ; de la même manière, le quadrilatère $AKCG$, dont les diagonales $[AC]$ et $[GK]$ se coupent en leur milieu N, est aussi un parallélogramme. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont égaux, de même pour les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{GA}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont égaux, donc le quadrilatère $BCKJ$ est bien un parallélogramme ; ses diagonales se coupant au point G, le centre du parallélogramme $BCKJ$ est donc ce point G.

k°) Puisque le point G est le milieu du segment $[BK]$, on a donc $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GK}$; de même, puisque le point N est le milieu du segment $[GK]$, on a donc $\overrightarrow{GK} = 2\overrightarrow{NK}$, donc $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{NK}$, donc $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{NK} = 2\overrightarrow{BG} - \frac{\overrightarrow{BG}}{2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$, donc $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$.

l°) Si $P = G$, alors $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\left[\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right] = \frac{2}{3}\left[\overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right]$, donc $3\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
Réciproquement, si $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \vec{0}$, donc $3\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AN} = 2\left[\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right] = 2\overrightarrow{BN}$, donc $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$.

i°)