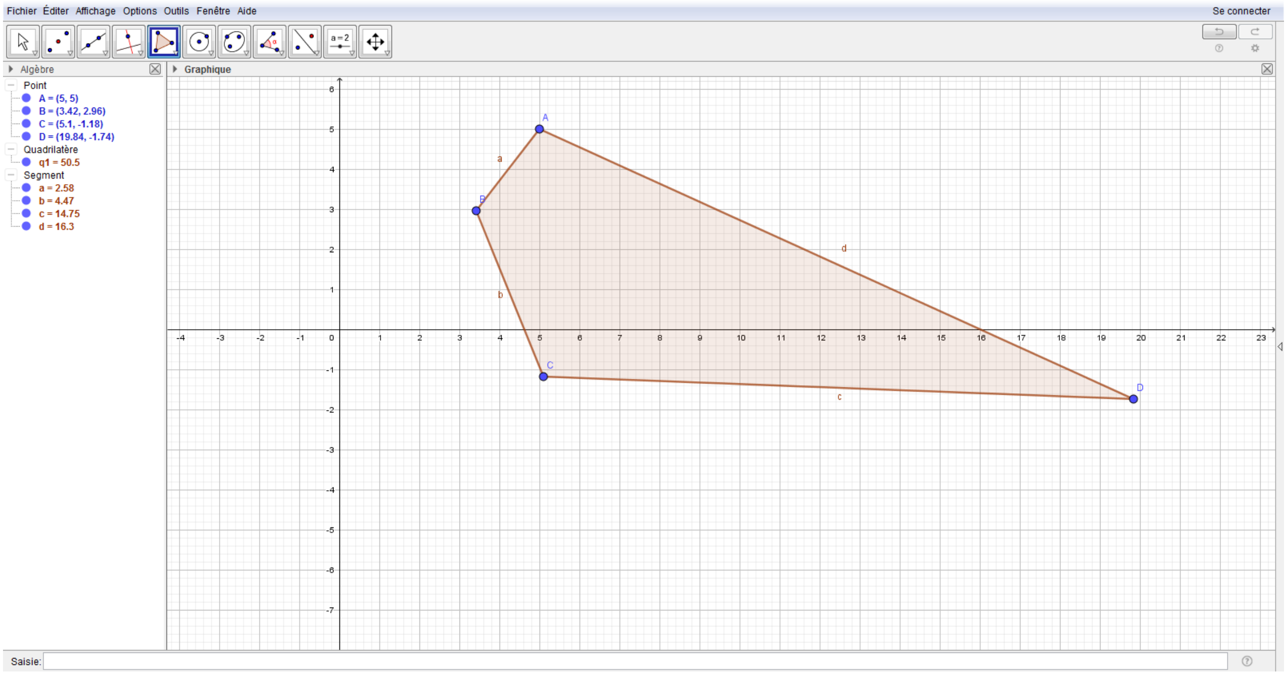
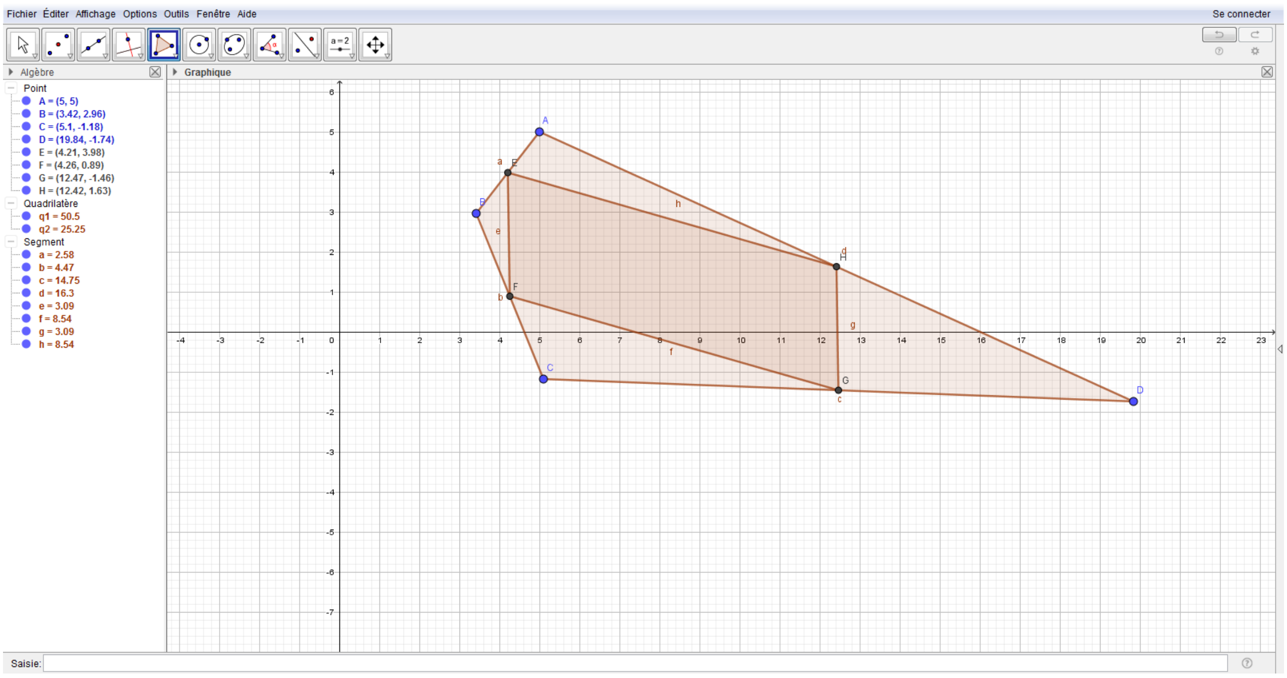
quadrilatères de Varignon — correction

1°) conjectures à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

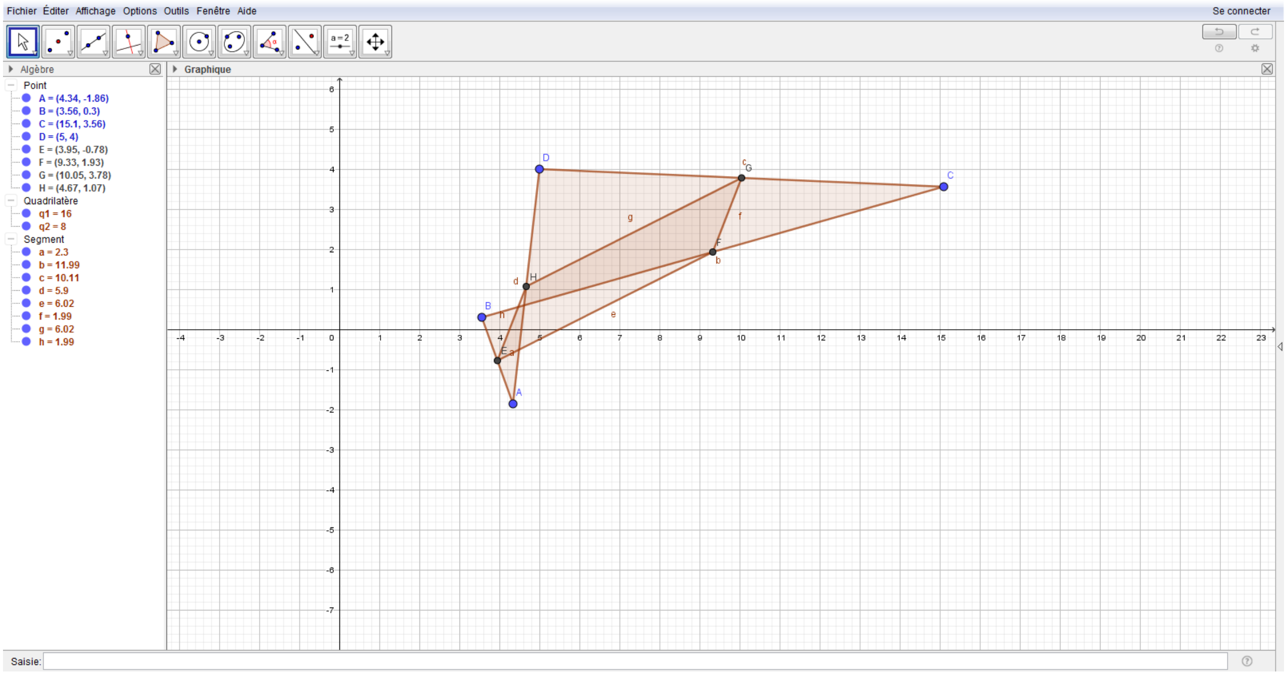
a°) Suivant les consignes, il s'agit de cliquer sur quatre points distincts de la zone graphique, puis de cliquer sur le premier point créé pour finir la construction du polygone qui est donc un quadrilatère ; la capture d'écran ci-dessous présente un exemple de réalisation demandée.



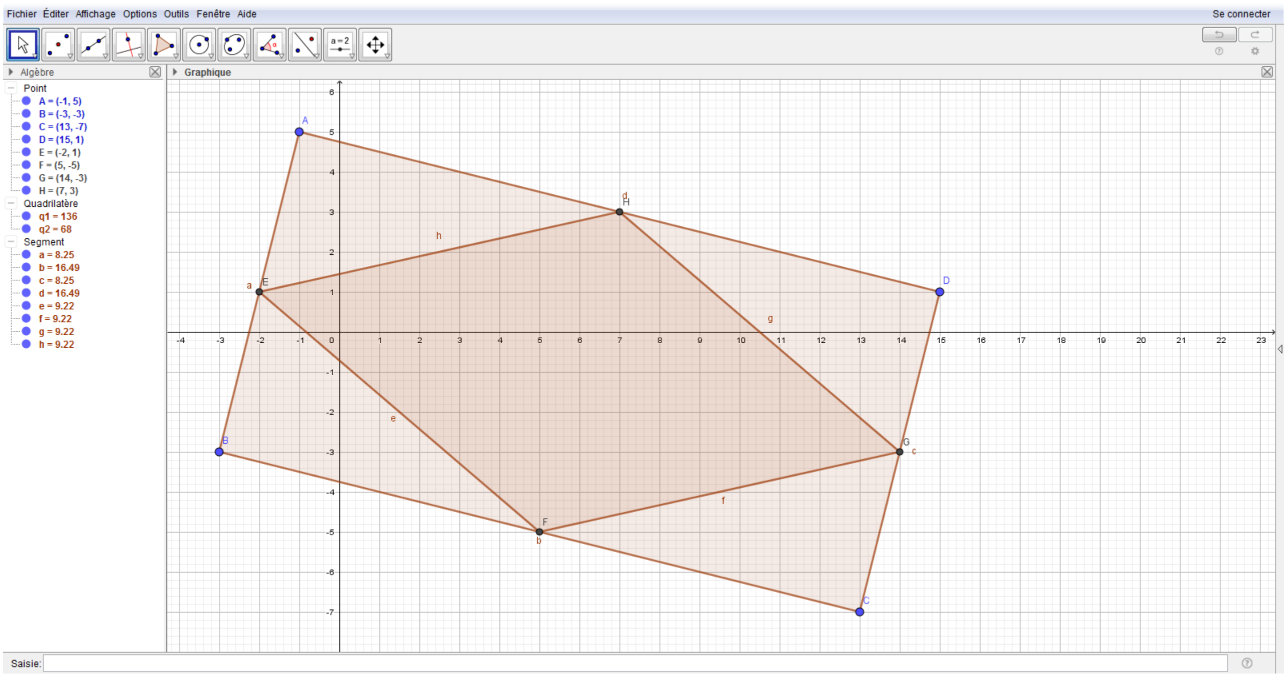
b°) En suivant les consignes, on crée les points E, F, G et H milieux respectifs des segments $[AB]$ $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$ puis on crée le quadrilatère $EFGH$; la capture d'écran ci-dessous présente un exemple de réalisation demandée.



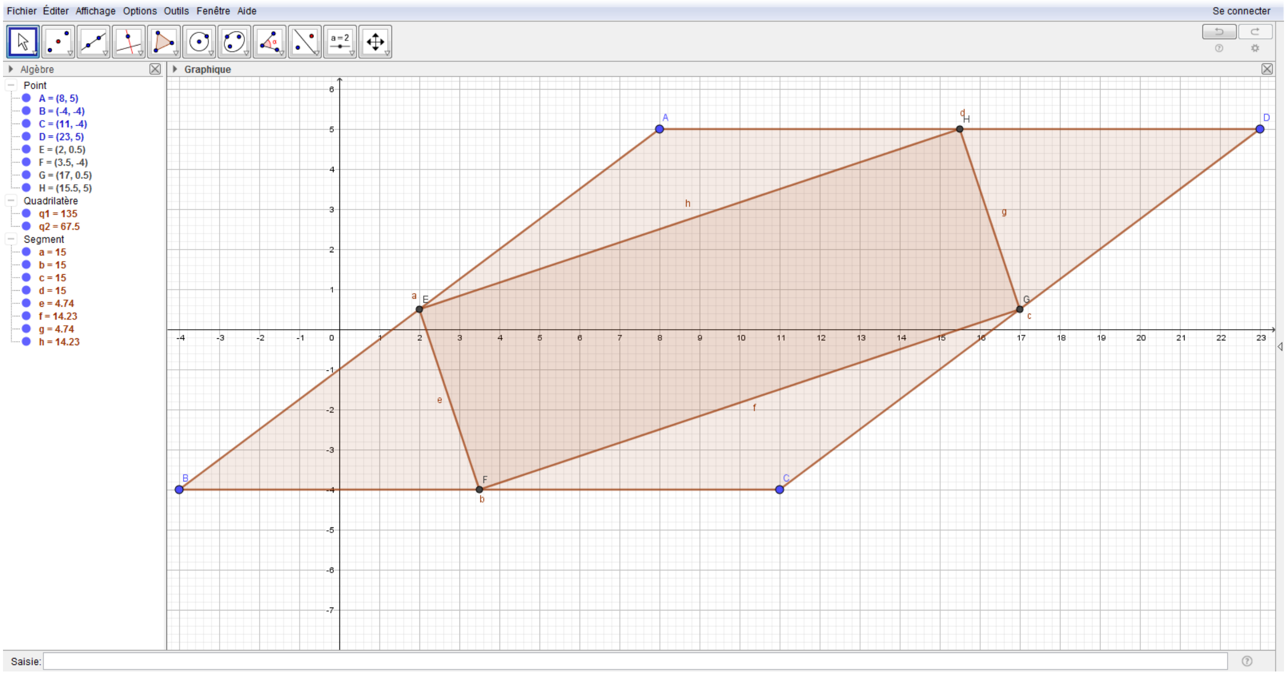
c°) Le quadrilatère $EFGH$ semble être un parallélogramme ; cela semble bien toujours demeurer le cas lorsque les points A, B, Cet D sont déplacés. La capture d'écran ci-dessous présente un cas où le quadrilatère $ABCD$ est croisé ; le quadrilatère $EFGH$ semble en effet toujours être un parallélogramme.



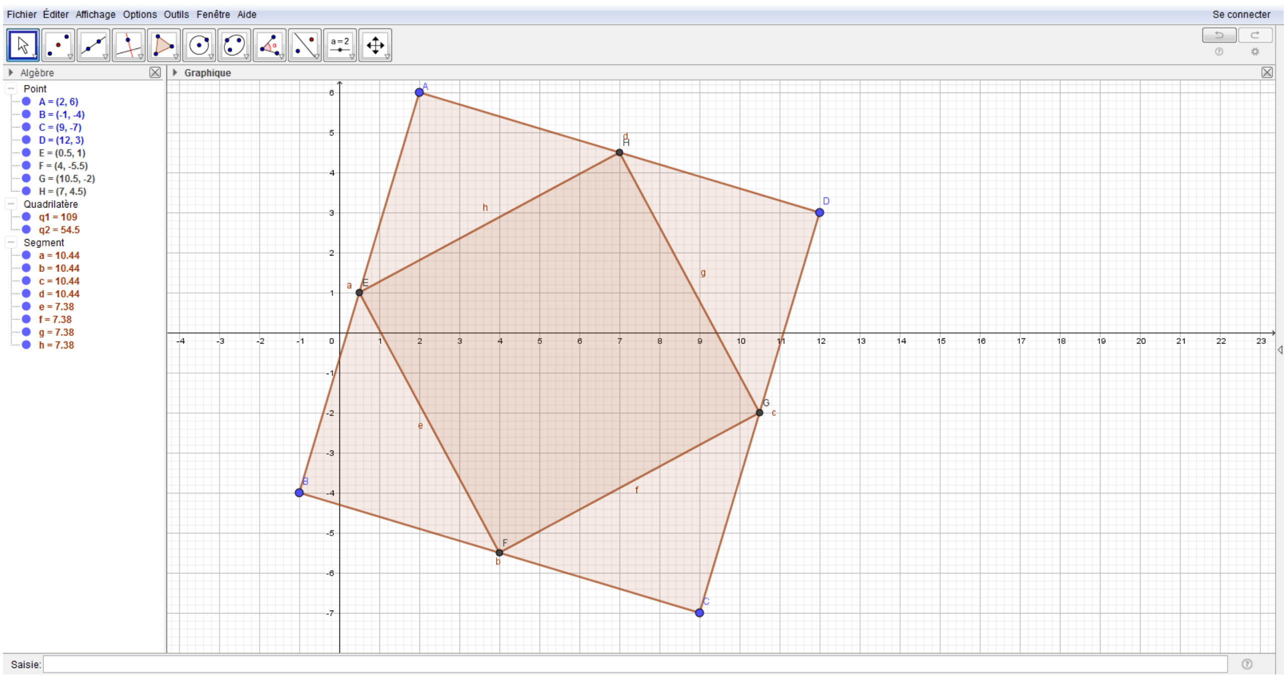
d°) Il semble que, si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle quelconque, alors le quadrilatère $EFGH$ est un losange ; on peut voir un exemple de cette situation dans la capture d'écran ci-dessous.



e°) Il semble que, si le quadrilatère $ABCD$ est un losange quelconque, alors le quadrilatère $EFGH$ est un rectangle ; on peut voir un exemple de cette situation dans la capture d'écran ci-après.



f°) Il semble que, si le quadrilatère $ABCD$ est un carré quelconque, alors le quadrilatère $EFGH$ est alors un carré ; on peut voir un exemple de cette situation dans la capture d'écran ci-après.



2°) <u>preuves des conjectures</u>

g°) Considérant le triangle ABC, (A, E, B) et (C, F, B) sont des triplets de points alignés dans le même ordre vérifiant $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC}$ (ces deux rapports ont tous deux pour valeur 0.5 puisque les points E et F sont milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[BC]$) ; d'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que les droites (EF) et (AC) sont parallèles. Le même raisonnement conduit dans le triangle BCD permet de prouver que les droites (GH) et (AC) sont aussi parallèles.

h°) Les droites (EF) et (GH) ont donc une droite parallèle commune : il s'agit de la droite (AC) ; par transitivité du parallélisme, on en déduit que les droites (EF) et (GH) sont parallèles, donc que les segments $[EF]$ et $[GH]$ qui y sont inclus sont aussi parallèles ; on calcule ensuite leurs longueurs. Comme les droites (EF) et (AC) sont parallèles et que (A, E, B) et (C, F, B) sont des triplets de points alignés dans le même ordre, le théorème de Thalès appliqué au triangle ABC fournit que $\frac{BE}{BA} = \frac{BF}{BC} = \frac{EF}{AC}$, et avec $\frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\frac{EF}{AC} = \frac{1}{2}$. De même dans le triangle BCD, on obtient $\frac{DG}{DC} = \frac{DH}{DA} = \frac{GH}{AC}$, et avec $\frac{DG}{DC} = \frac{1}{2}$, on en déduit que $\frac{GH}{AC} = \frac{1}{2}$. On en déduit finalement que $\frac{EF}{AC} = \frac{GH}{AC}$, puis donc que les distances EF et GH sont bien égales. On a donc bien prouvé que les segments $[EF]$ et $[GH]$ sont parallèles et de même longueur.

i°) Admettant deux côtés en vis-à-vis parallèles et de même longueur, le quadrilatère $EFGH$ est donc un parallélogramme.

j°) Si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle, il en est de même des quadrilatères $ABFH$ et $AEGD$; les droites (FH) et (AB) sont donc parallèles tout comme les droites (EG) et (AD), mais comme les droites (AB) et (AD) sont perpendiculaires, les droites (EG) et (FH) sont donc perpendiculaires. Il a été établi en section i° que le quadrilatère $EFGH$ est un parallélogramme, ses diagonales se coupent donc en leur milieu ; les segments $[EG]$ et $[FH]$ sont donc perpendiculaires et se coupent en leurs milieux, donc le point E, par exemple, est sur la médiatrice du segment $[FH]$, donc les distances EF et EH sont égales. Le parallélogramme $EFGH$ admettant deux côtés consécutifs de même longueur, ils s'agit donc d'un losange.

k°) Si le quadrilatère $ABCD$ est un losange, alors le point A est à égale distance des points B et D, donc appartient à la médiatrice du segment $[BD]$; il en est de même pour le point C. La médiatrice du segment $[BD]$ est donc la droite (AC) ; les droites (AC) et (BD) sont donc bien perpendiculaires. On prouve de manière similaire qu'en section g° que les droites (FG) et (EH) sont toutes les deux parallèles à la droite (BD), mais comme cette droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC), elle-même parallèle à la droite (EF) par exemple, on en déduit que les droites (EF) et (FG) sont perpendiculaires. Comme le parallélogramme $EFGH$ admet un angle droit, il s'agit donc bien d'un rectangle.

l°) Si le quadrilatère $ABCD$ est un carré, alors il s'agit donc d'un rectangle et d'un losange. D'après la section j°, le quadrilatère $EFGH$ est donc un losange et, d'après la section k°, il s'agit aussi d'un rectangle. Finalement le quadrilatère $EFGH$ est ainsi donc bien aussi un carré.

m°) Il est en effet tout à fait possible que le quadrilatère $EFGH$ soit un carré sans que cela soit le cas pour le quadrilatère $ABCD$. La capture d'écran ci-après présente une telle situation.