quadrilatères de Varignon

objectif : à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, retrouver les propriétés caractéristiques de quadrilatères

1°) <u>conjectures à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique</u>

a°) Ouvrir le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra. Créer alors le quadrilatère $ABCD$ (cliquer pour cela sur le bouton « Polygone » puis cliquer sur des points de la fenêtre où placer les sommets de ce quadrilatère).

b°) Cliquer sur la petite flèche en bas à droite du bouton « Point », puis cliquer sur « Milieu ou centre ». Cliquer alors sur le point A, puis sur le point B, ce qui permet de créer le point E milieu du segment $[AB]$. Créer de la même manière les points F, G et H milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. Créer alors le quadrilatère $EFGH$.

c°) Déterminer de quelle nature semble être ce quadrilatère $EFGH$; déterminer également si cela semble toujours demeurer le cas lorsque les points A, B, Cet D sont déplacés.

d°) Positionner les points A, B, C et D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle (on pourra s'aider de la grille et des coordonnées des points ; si la grille est absente, la faire apparaître en cliquant sur la flèche juste à gauche de « Graphique » en haut de la sous-fenêtre associée puis cliquer sur le bouton « Afficher ou cacher la grille » (appuyer sur la touche « Échap » tout en haut à gauche du clavier si ce bouton n'apparaît pas après avoir cliqué sur cette petite flèche ; cliquer alors sur celle-ci pour faire apparaître ce bouton)). Déterminer quelle semble être alors la nature du quadrilatère $EFGH$ lorsque le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle ; déterminer également si cela semble toujours demeurer le cas pour d'autres positions des points A, B, Cet D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

e°) Positionner les points A, B, C et D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un losange. Déterminer quelle semble être alors la nature du quadrilatère $EFGH$ lorsque le quadrilatère $ABCD$ est un losange ; déterminer également si cela semble toujours demeurer le cas pour d'autres positions des points A, B, Cet D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un losange.

f°) Positionner les points A, B, C et D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré. Déterminer quelle semble être alors la nature du quadrilatère $EFGH$ lorsque le quadrilatère $ABCD$ est un carré ; déterminer également si cela semble toujours demeurer le cas pour d'autres positions des points A, B, Cet D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

2°) <u>preuves des conjectures</u>

Dans toute la suite, on considère un quadrilatère $ABCD$ quelconque ainsi que les points E, F, G et H milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

g°) Prouver que les droites (EF) et (AC) sont parallèles ; faire de même avec les droites (GH) et (AC).

h°) En déduire que les segments $[EF]$ et $[GH]$ sont parallèles et de même longueur.

i°) En déduire la nature du quadrilatère $EFGH$.

j°) On suppose dans cette section seulement que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle. Prouver qu'alors les droites (EG) et (FH) sont perpendiculaires ; en déduire que le quadrilatère $EFGH$ est un losange.

k°) On suppose dans cette section seulement que le quadrilatère $ABCD$ est un losange. Prouver qu'alors les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ; en déduire que le quadrilatère $EFGH$ est un rectangle.

l°) En déduire donc que, si le quadrilatère $ABCD$ est un carré, alors le quadrilatère $EFGH$ est aussi un carré.

m°) Se peut-il que le quadrilatère $EFGH$ soit un carré sans que cela soit le cas pour le quadrilatère $ABCD$?