exercices

1°) vers les inéquations du deuxième degré

On considère la fonction polynôme du deuxième degré f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$f\ :\ x \longmapsto 7x - 20x^2 + 6$$

a°) Exprimer cette fonction f sous forme canonique ; établir ainsi son tableau de variations.

b°) Établir le tableau de signes de cette fonction f (justifier soigneusement).

Déduire de ce qui précède l'ensemble solution de chacune des inéquations d'inconnu le nombre réel x suivantes.

c°) $f(x) \leq 0$

d°) $f(x) \leq 7$

2°) réalisation de bénéfices

Une entreprise fabrique des éoliennes ; chaque éolienne produite est vendue 1200 €. Le coût total de fabrication, en euros, de q éolienne(s) en un jour, est donné par la fonction C définie sur $\mathbb{N}$ de la façon suivante : $C\ :\ q \longmapsto 40[q[q+5]+100]$. On note B la fonction définie sur $\mathbb{N}$ qui, au nombre q d'éolienne(s) fabriquée(s) et vendue(s) en une même journée, associe le bénéfice réalisé, en euros, cette même journée par cette entreprise.

e°) Déterminer si cette entreprise réalise des bénéfices un jour où elle fabrique et vend 4 de ses éoliennes ; faire de même pour un jour où elle fabrique et vend 10 de ses éoliennes.

f°) Prouver que cette fonction B est définie sur $\mathbb{N}$ de la façon suivante : $B\ :\ q \longmapsto -40q^2 + 1000q - 4000$.

g°) Un jour, cette entreprise a subit 10k€ de pertes ; déterminer combien d'éolienne(s) cette entreprise a fabriqué et vendu ce jour-là.

h°) Déterminer le signe de $-40x^2 + 1000x - 4000$, trinôme de x, en fonction de x ; en déduire l'ensemble solution de l'inéquation d'inconnu le nombre entier q suivante : $B(q) > 0$; interpréter ce dernier résultat.

i°) Établir le tableau de variations de $-40x^2 + 1000x - 4000$ avec x ; en déduire combien d'éolienne(s) cette entreprise a intérêt de fabriquer et de vendre en un jour de sorte à maximiser son bénéfice ce jour-là ; préciser le montant, en euros, de ces bénéfices maximaux.

3°) relation entre coefficients et racines

On considère une fonction polynôme du deuxième degré f dont on note a le coefficient dominant, nécessairement non nul par définition, b la pente à l'origine et c l'ordonnée à l'origine. On suppose que son discriminant est strictement positif ; cette fonction f a donc deux racines distinctes réelles qu'on note x_- et x_+ et peut donc s'exprimer sur $\mathbb{R}$ sous forme factorisée de la façon suivante : $f\ :\ x \longmapsto a[x - x_-][x - x_+]$.

j°) Développer au maximum et réduire au mieux l'expression de x suivante : $a[x - x_-][x - x_+]$.

k°) En utilisant la forme développée de cette fonction f, prouver que $x_- + x_+ = -\frac{b}{a}$ et $x_- \times x_+ = \frac{c}{a}$.

Ces deux dernières relations sont les **relations entre coefficients et racines** ; elles sont d'un intérêt remarquable lorsqu'il s'agit de déterminer une racine d'une fonction polynôme du deuxième degré lorsqu'on en connaît l'autre. Pour illustrer cela, on considère la fonction polynôme du deuxième degré f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $f\ :\ x \longmapsto 5x^2 - 26x + 5$

l°) Prouver que 5 est racine de cette fonction f.

m°) Utiliser une des relations entre coefficients et racines pour trouver une autre racine de cette fonction f.