équation d'une parabole — correction

a°) L'axe de symétrie de la parabole est la droite (PS) parallèle à l'axe des ordonnées puisque les abscisses des points A et S sont égales ; cette parabole est donc bien la courbe représentative d'une fonction polynôme du deuxième degré, c'est-à-dire d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante, où où a, b et c sont des nombres réels : $f \,:\, x \longmapsto ax^2 + bx + c$.

b°) Les branches de la parabole étant orientées vers les ordonnées négatives (on dit que la parabole est "renversée"), le coefficient dominant a est donc négatif.

c°) Tout point de coordonnées $(x\,,y)$ d'une courbe représentative d'une fonction a ses coordonnées vérifiant l'équation de cette courbe : $y = f(x)$. L'origine du repère ayant pour coordonnées $(0\,,0)$, on en déduit que $0 = f(0)$; comme $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$, on a bien donc nécessairement $c = 0$.

d°) $x_S = -\frac{b}{2a}$ (on a bien $a \neq 0$ pour une fonction polynôme du deuxième degré), or, ici, $x_S = -1$. Par conséquent, $-\frac{b}{2a} = -1$ d'où on en déduit que $b = 2a$.

e°) Le point S est un point de la parabole ; ses coordonnées $(x_S\,,y_S)$ vérifient donc la relation $y_S = f(x_S)$, donc $y_S = f(-1) = a \times [-1]^2 + b \times [-1] + c \overset{c=0}{=} a - b$. Avec $y_S = 2$, on en déduit que $a - b = 2$.

f°) Avec $b = 2a$, on déduit de la précédente équation que $a - 2a = 2$, donc $-a = 2$, d'où $a = -2$ (on a bien $a < 0$ conformément au résultat établi en b°). On en déduit finalement que $a = -2$, $b = -4$ et $c = 0$.

g°) Première méthode : on résout l'équation d'inconnu le nombre réel x suivante : $f(x) = 0$. Comme $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x[x+2] = 0 \Leftrightarrow [x = 0$ ou $x = -2]$, on en déduit que les solutions recherchées sont 0 et -2. Cette méthode requiert de connaître les valeurs des coefficients a, b et c ; on pourrait donc croire que cette question n'est pas indépendante des autres.

Deuxième méthode : on a une parabole représentative d'une fonction trinôme de coefficient $a < 0$ avec une ordonnée de sommet $y_S = 2$ strictement positive ; on sait donc que l'équation d'inconnu le nombre réel $f(x) = 0$ présente exactement deux solutions "symétriques" par rapport à $x_S = -1$ abscisse du sommet de la parabole dans un repère orthogonal. Or, comme l'origine est un point de la parabole, on dispose ainsi d'une solution : 0 ; l'autre solution est donc la valeur symétrique de 0 par rapport à -1, à savoir -2.