correction d'exercice

1°) différentes formes de cette fonction *f*

a°) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = [2x-3][5x+1]+7 = 2x \times 5x + 2x \times 1 - 3 \times 5x - 3 \times 1 + 7$ $= 10x^2 + 2x - 15x - 3 + 7 = 10x^2 - 13x + 4 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 10$, $b = -13$ et $c = 4$. Cette fonction f est ainsi bien une fonction polynôme du deuxième degré ; on vient de l'exprimer sous **forme développée** (la forme initiale $f : x \longmapsto [2x-3][5x+1]+7$ n'est pas ce qui s'appelle **la** forme développée…).

b°) $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-13}{2\times 10} = \frac{13}{20} = 0.65$ et $y_S = f(x_S) = f\left(\frac{13}{20}\right) = 10 \times \left[\frac{13}{20}\right]^2 - 13 \times \frac{13}{20} + 4$ $= \frac{169}{40} - \frac{169}{20} + 4 = -\frac{169}{40} + \frac{160}{40} = -\frac{9}{40} = -0.225$; dans un repère orthogonal du plan, les coordonnées dans de repère du sommet S de la parabole représentative de cette fonction f sont donc $(0.65\,, -0.225)$. La forme canonique de cette fonction polynôme du deuxième degré f est donc $f : x \longmapsto 10\left[x - \frac{13}{20}\right]^2 - \frac{9}{40}$.

c°) Il s'agit de déterminer si cette fonction polynôme du deuxième degré a au moins une racine réelle ; on calcule pour cela le discriminant de $10x^2 - 13x + 4$, trinôme de x : $\Delta = [-13]^2 - 4 \times 10 \times 4$ $= 169 - 160 = 9$. Puisque son discriminant est strictement positif, ce trinôme admet donc deux racines distinctes réelles, $x_- = \frac{-[-13]-\sqrt{9}}{2\times 10} = \frac{13-3}{20} = 0.5$ et $x_+ = \frac{-[-13]+\sqrt{9}}{2\times 10} = \frac{13+3}{20} = 0.8$, et cette fonction f peut donc se rpésenter sous forme factorisée : $f : x \longmapsto 10[x-0.5][x-0.8]$.

2°) recherche d'antécédents par cette fonction *f*

d°) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 10[x-0.8][x-0.5] = 0$ mais comme un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins un des facteurs est nul, on en déduit que $f(x) = 0 \Leftrightarrow [x - 0.8 = 0 \text{ ou } x - 0.5 = 0]$ $\Leftrightarrow [x = 0.8 \text{ ou } x = 0.5]$; 0 admet donc deux antécédents par cette fonction f : 0.8 et 0.5. On retrouve bien les racines déterminées en section c°.

e°) $f(x) = 7 \Leftrightarrow [2x-3][5x+1]+7 = 7 \Leftrightarrow [2x-3][5x+1] = 0$ mais comme un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins un des facteurs est nul, on en déduit que $f(x) = 7$ $\Leftrightarrow [2x - 3 = 0 \text{ ou } 5x + 1 = 0] \Leftrightarrow \left[x = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ ou } x = -\frac{1}{5} = -0.2\right]$; 7 admet donc deux antécédents par cette fonction f : -0.2 et 1.5.

f°) $f(x) = 4 \Leftrightarrow 10x^2 - 13x + 4 = 4 \Leftrightarrow 10x^2 - 13x = 0 \Leftrightarrow x[10x - 13] = 0$ mais comme un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins un des facteurs est nul, on en déduit que $f(x) = 4$ $\Leftrightarrow [x = 0 \text{ ou } 10x - 13 = 0] \Leftrightarrow \left[x = 0 \text{ ou } x = \frac{13}{10} = 1.3\right]$; 4 admet donc deux antécédents par cette fonction f : 0 et 1.3.

g°) Jusqu'ici, la forme canonique de cette fonction f n'a pas été utilisée ; il se trouve que cette forme est d'un grand intérêt ici, comme illustré dans les calculs suivants : $f(x) = -0.225$ $\Leftrightarrow 10\left[x - \frac{13}{20}\right]^2 - \frac{9}{40} = -\frac{9}{40} \Leftrightarrow 10\left[x - \frac{13}{20}\right]^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{20} = 0.65$. -0.225 admet donc qu'une seule antécédent par cette fonction f : 0.65 (on ne manquera pas de faire le lien avec les coordonnées du sommet de la parabole représentative de cette fonction f dansn un repère orthogonal du plan).

h°) $f(x) = 0.175 \Leftrightarrow 10\left[x - \frac{13}{20}\right]^2 - \frac{9}{40} = 0.175 \Leftrightarrow 10 \times \left[x - \frac{13}{20}\right]^2 = 0.175 + \frac{9}{40} = \frac{7}{40} + \frac{9}{40} = \frac{16}{40}$ $\Leftrightarrow \left[x - \frac{13}{20}\right]^2 = \frac{16}{400} \Leftrightarrow \left[x - \frac{13}{20} = -\sqrt{\frac{16}{400}} \text{ ou } x - \frac{13}{20} = \sqrt{\frac{16}{400}}\right] \Leftrightarrow \left[x - \frac{13}{20} = -\frac{4}{20} \text{ ou } x - \frac{13}{20} = \frac{4}{20}\right]$ $\Leftrightarrow \left[x = \frac{13}{20} - \frac{4}{20} = \frac{9}{20} = 0.45 \text{ ou } x = \frac{13}{20} + \frac{4}{20} = \frac{17}{20} = 0.85\right]$; $0,.175$ admet donc deux antécédents par cette fonction f : 0.45 et 0.85.

i°) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 10\left[x - \frac{13}{20}\right]^2 - \frac{9}{40} = 10\left[x - \frac{13}{20}\right]^2 - 0.225$, mais comme $\forall x \in \mathbb{R}, 10\left[x - \frac{13}{20}\right]^2 \geq 0$, (le carré d'un nombre réel est toujours positif) on en déduit que, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -0{,}225$, donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -1$; -1 n'a donc pas d'antécédent par cette fonction polynôme du deuxième degré f.