fonctions polynôme du deuxième degré correction

a°) Le tableau suivant regroupe les valeurs des coefficients des fonctions du deuxième degré considérées.

	f	g	h	j	k	l
coefficient dominant a	2	2	-2	-2	1	-4
pente à l'origine b	3	3	3	3	2	-4
ordonnée à l'origine c	1	2	1	-2	1	-1

b°) Dans toute la suite, on note x_S l'abscisse du sommet d'une parabole et y_S l'ordonnée de ce sommet. On rappelle que, notant a le coefficient dominant d'une fonction polynôme du deuxième degré et b sa pente à l'origine, l'abscisse du sommet de sa parabole représentative dans un repère orthogonal est donnée par la formule $x_S = -\frac{b}{2a}$ et son ordonnée dans ce même repère y_S est l'image par cette fonction de x_S.

Pour $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$, on a $x_S = -\frac{3}{2\times2} = -\frac{3}{4}$, donc $y_S = f(x_S) = 2 \times \left[-\frac{3}{4}\right]^2 + 3 \times \left[-\frac{3}{4}\right] + 1$ $= 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 1 = -\frac{9}{8} + 1 = -\frac{1}{8} = -0.125 < 0$; son coefficient dominant étant strictement positif ($a = 2 > 0$), la parabole représentative de la fonction f est ainsi orientée “vers le haut”.

Pour $g : x \mapsto 2x^2 + 3x + 2$, on a $x_S = -\frac{3}{2\times2} = -\frac{3}{4}$, donc $y_S = g(x_S) = 2 \times \left[-\frac{3}{4}\right]^2 + 3 \times \left[-\frac{3}{4}\right] + 2$ $= 2 \times \frac{9}{16} - \frac{9}{4} + 2 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 2 = -\frac{9}{8} + 2 = \frac{7}{8} = 0.875 > 0$; son coefficient dominant étant strictement positif ($a = 2 > 0$), la parabole représentative de la fonction g est ainsi orientée “vers le haut”.

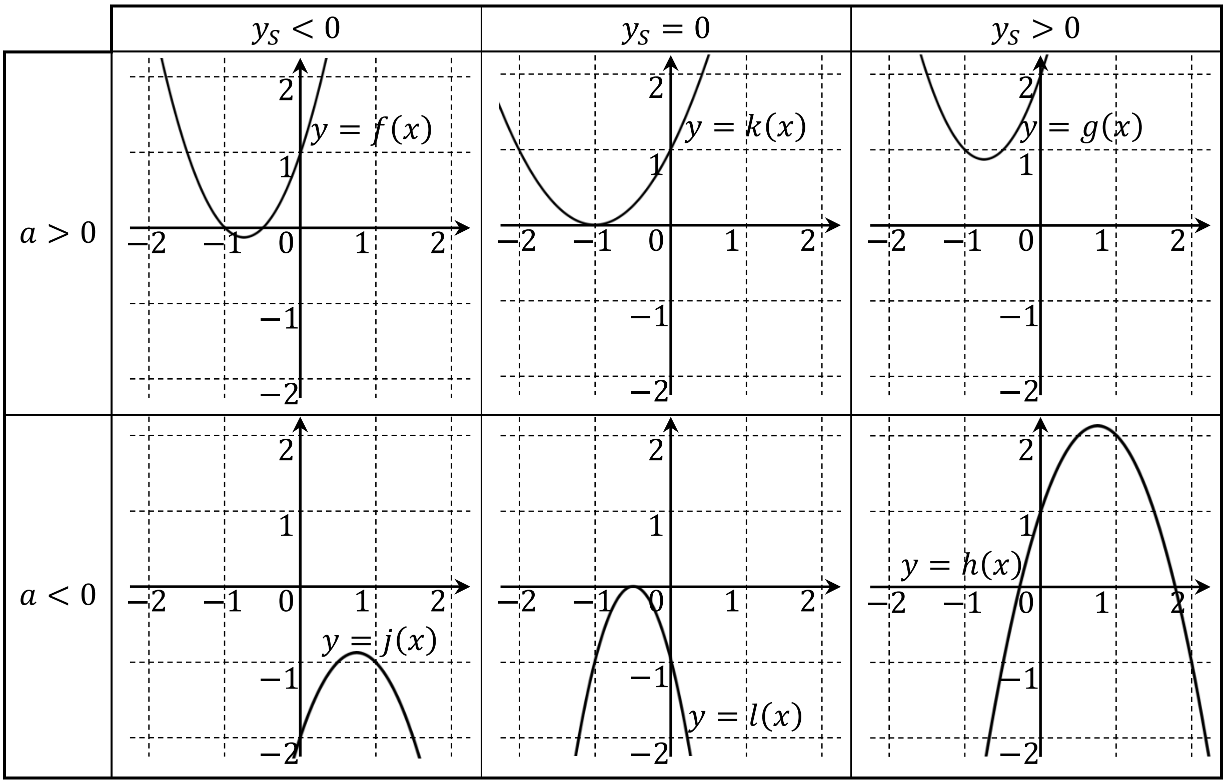
Pour $h : x \mapsto -2x^2 + 3x + 1$, on a $x_S = -\frac{3}{2\times[-2]} = \frac{3}{4}$, donc $y_S = h(x_S) = -2 \times \left[\frac{3}{4}\right]^2 + 3 \times \frac{3}{4} + 1$ $= -2 \times \frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 1 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 1 = \frac{9}{8} + 1 = \frac{17}{8} = 2.125 > 0$; son coefficient dominant étant strictement négatif ($a = -2 < 0$), la parabole représentative de la fonction h est ainsi orientée “vers le bas”.

Pour $j : x \mapsto -2x^2 + 3x - 2$, on a aussi $x_S = -\frac{3}{2\times[-2]} = \frac{3}{4}$, donc $y_S = j(x_S) = -2 \times \left[\frac{3}{4}\right]^2 + 3 \times \frac{3}{4} - 2$ $= -2 \times \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - 2 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} - 2 = \frac{9}{8} - 2 = -\frac{7}{8} = -0.875 < 0$; son coefficient dominant étant strictement négatif ($a = -2 < 0$), la parabole représentative de la fonction j est ainsi orientée “vers le bas”.

Pour $k : x \mapsto x^2 + 2x + 1$, on a $x_S = -\frac{2}{2\times1} = -1$, donc $y_S = k(x_S) = [-1]^2 + 2 \times [-1] + 1$ $= 1 - 2 + 1 = 0$; son coefficient dominant étant strictement positif ($a = 1 > 0$), la parabole représentative de la fonction k est ainsi orientée “vers le haut”.

Pour $l : x \mapsto -4x^2 - 4x - 1$, on a $x_S = -\frac{-4}{2\times[-4]} = -\frac{1}{2}$, donc $y_S = l(x_S) = -4 \times \left[-\frac{1}{2}\right]^2 - 4 \times \left[-\frac{1}{2}\right] - 1$ $= -4 \times \frac{1}{4} + 2 - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$; son coefficient dominant étant strictement négatif ($a = -4 < 0$), la parabole représentative de la fonction l est ainsi orientée “vers le bas”.

c°) On représente dans le tableau ci-dessous chacune d'elles à l'endroit adéquat (a désigne son coefficient dominant et y_S désigne l'ordonnée du sommet de sa parabole représentative dans un repère orthonormé).



d°) On calcule, pour chacune de ces six fonctions, la valeur de $\Delta = b^2 - 4ac$ où a est son coefficient dominant, b sa pente à l'origine et c son ordonnée à l'origine.

Pour f, $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$.
Pour g, $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7$.
Pour h, $\Delta = 3^2 - 4 \times [-2] \times 1 = 9 + 8 = 17$.
Pour j, $\Delta = 3^2 - 4 \times [-2] \times [-2] = 9 - 16 = -7$.
Pour k, $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$.
Pour l, $\Delta = [-4]^2 - 4 \times [-4] \times [-1] = 0$.

Le tableau suivant regroupe la valeur du discriminant de chacun des six trinômes considérés ; anticipant la section e°, on note en outre le nombre de racine(s) de chacun de ces six trinômes.

	f	g	h	j	k	l
discriminant Δ	1	-7	17	-7	0	0
nombre de racine(s)	2	0	2	0	1	1

e°) Il semblerait que lorsque le discriminant d'une fonction polynôme du deuxième degré est strictement positif, cette fonction a exactement deux racines réelles, que lorsque ce discriminant est nul, cette fonction a exactement une racine réelle et que lorsque ce discriminant est strictement négatif, cette fonction n'a aucune racine réelle.