espérance et variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

1°) <u>questions de cours</u>

a°) k et n étant deux nombres entiers naturels quelconques, rappeler les définitions de $n!$ et de $\binom{n}{k}$.

b°) k et n étant deux nombres entiers naturels quelconques, exprimer $\binom{n}{k}$ à l'aide de factorielles.

c°) Rappeler la formule de Pascal.

2°) <u>application</u>

Dans toute la suite de l'étude, n désigne un nombre entier naturel strictement positif quelconque et p désigne un nombre réel quelconque de l'intervalle $[0\,,1]$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p, c'est-à-dire que, pour tout nombre entier k de l'intervalle $[0\,,n]$, la probabilité $\wp(X = k)$ que la variable aléatoire X soit égale à k est égale à $\binom{n}{k} p^k [1-p]^{n-k}$; si l'entier k n'appartient pas à l'intervalle $[0\,,n]$, alors $\wp(X = k) = 0$.

d°) Calculer $\sum_{k=0}^{n}(\wp(X = k))$; interpréter le résultat obtenu.

e°) L'espérance de cette variable aléatoire X est donnée par la formule $\mathrm{esp}(X) = \sum_{k=0}^{n}(k\,\wp(X = k))$; déterminer la valeur de l'espérance de cette variable aléatoire X ; interpréter le résultat obtenu.

f°) La variance de cette variable aléatoire X est donnée par la formule $\mathrm{var}(X) = \mathrm{esp}(X^2) - \mathrm{esp}(X)^2$ avec $\mathrm{esp}(X^2) = \sum_{k=0}^{n}(k^2\,\wp(X = k))$; expliciter cette dernière somme ; en déduire que $\mathrm{var}(X) = np[1-p]$.